CONCOURS SPECIAL 1979

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (Remplacement)

Durée : 4 heures

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels non nuls.
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls.

I

On considère A l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\exists \alpha \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \alpha |x| .$$

1. Toute fonction appartenant à A est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?
2. f étant donnée dans A, on note E_f l'ensemble des réels α défini par :
$$E_f = \{\alpha \geqslant 0 : \forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leqslant \alpha |x|\} .$$
   a. Démontrer que E_f admet une borne inférieure α_f et que l'application $f \mapsto \alpha_f$ est une norme sur A. On notera $\alpha_f = \|f\|$.
   b. Prouver : $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^*} \left|\frac{f(x)}{x}\right|$.
3. Prouver que A, muni de la norme précédente, est complet.

II

Dans toute la suite du problème, λ et a sont des paramètres réels vérifiant:

$$\lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad 0 < a < 1 .$$

f étant une fonction donnée appartenant à A, on cherche toutes les fonctions $\varphi \in$ A, solutions de l'équation fonctionnelle :

$$E(\lambda, a, f), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) - \lambda \varphi(ax) = f(x) .$$

1. <u>On se place dans le cas : $a|\lambda| < 1$</u> .
   a. Si $\varphi \in$ A est une solution de $E(\lambda,a,f)$, prouver : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \varphi(x) - \lambda^n \varphi(a^n x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(a^k x)$.
   En déduire que $E(\lambda,a,f)$ admet au plus une solution dans A.
   b. Prouver que, pour toute fonction $f \in$ A, $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k f(a^k x)$ pour tout x réel définit l'unique solution de $E(\lambda,a,f)$ appartenant à A.
   c. Exemple dans le cas : $a|\lambda| < 1$.
   Soit f telle que : $f(x) = x$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$.
   Trouver la solution φ .

2. <u>On se place dans le cas : $a|\lambda| > 1$</u> .
   a. Prouver, par une méthode analogue à la précédente, que $E(\lambda,a,f)$ admet une solution unique appartenant à A. Définir cette solution.
   b. Exemple dans le cas : $a\lambda > 1$.
   Soit f telle que : $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x.\sin(\mathrm{Log}|x|)$.
   Trouver la solution φ.
3. Dans le cas $a|\lambda| \neq 1$, prouver que, si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors φ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Dans le cas $a|\lambda| \neq 1$, prouver que, si f admet une dérivée en 0, f'(0), alors φ est dérivable en 0. Calculer la dérivée $\varphi'(0)$ en fonction de f'(0).

III

1. <u>On se place dans le cas : $a\lambda = 1$</u> .
   a. On pose : $x = e^t$ si $x > 0$ et $x = -e^\theta$ si $x < 0$, où e est la base des logarithmes népériens. φ étant une solution de $E(\frac{1}{a},a,0)$, prouver que les fonctions P_1 et P_2 définies par :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \ P_1(t) = e^{-t}.\varphi(e^t) \quad \text{et} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \ P_2(\theta) = e^{-\theta}.\varphi(-e^\theta)$$
   sont périodiques.
   b. Décrire les solutions de $E(\frac{1}{a},a,0)$ qui appartiennent à A.
2. <u>On se place dans le cas : $a\lambda = -1$</u> .
   Décrire les solutions de $E(-\frac{1}{a},a,0)$ qui appartiennent à A.
3. Exemples :
   a. résoudre dans A l'équation $E(-\frac{1}{n},a,f)$ où $f(x)=x$ si $x \geqslant 0$ et $f(x)=0$ si $x<0$.
   b. Résoudre dans A l'équation $E(\frac{1}{a},a,f)$ où $f(x) = x.\sin(\mathrm{Log}|x|)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$. (On pourra s'aider du résultat du § II à b).

IV

On fixe λ et a tels que : $a|\lambda| \neq 1$.
On appelle u l'application de A dans A qui à toute fonction $f \in$ A fait correspondre la solution dans A de $E(\lambda,a,f)$.

1. Prouver que u est un endomorphisme continu de A, muni de la norme définie au § I.
2. a. Trouver les valeurs propres réelles de u et les fonctions propres associées.
   b. Prouver que u est bijectif.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail